

Έστω X ένας χώρος και K ένα σώμα.

Έστω, επίσης, $+$, $\cdot$ δύο πράξεις ώστε να ικανοποιούνται οι εξής ιδιότητες $\forall x, y, z \in X$ και $\lambda, \mu \in K$

1) Ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα της πρόσθεσης

$$(x+y)+z = x+(y+z)$$

2) Αντιμεταθετική της πρόσθεσης: $x+y = y+x$

3) Υπάρχει ουδέτερο στοιχείο για την πρόσθεση: $0+x = x+0 = x$

4) Υπάρχει αντίθετο στοιχείο $\forall x \in X$: $(-x)+x = x+(-x) = 0$

5) $\lambda(\mu \cdot x) = (\lambda \cdot \mu) \cdot x \quad \forall \lambda, \mu \in K$

6) Υπάρχει ουδέτερο στοιχείο 1 για το βαθμωτό πολλαπλάσιο

$$1 \cdot x = x$$

7) $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$ (επιμεριστική ως προς την πρόσθεση στοιχείων του X)

8) $(\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x$ (επιμεριστική ως προς την ποσότητα στοιχείων του X)

τότε ο X λέγεται διανυσματικός χώρος (ή γραμμ. χώρος) πάνω στο σώμα K

Δ' Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Θεωρούμε το σύνολο των συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το A και τιμές στο $\mathbb{R}$. Συμβολίζουμε $F(A, \mathbb{R})$.

Ορίζουμε σε αυτό το σύνολο τις εξής πράξεις:

1) $(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in A$

2) $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall x \in A$

1) Προσεταιριστική ως προς $+$ για $x \in A$:

$$\begin{aligned} [(f+g)+h](x) &= (f+g)(x) + h(x) = f(x) + g(x) + h(x) = \\ &= f(x) + (g+h)(x) = [f+(g+h)](x) \quad \text{τελικά} \end{aligned}$$

$$(f+g)+h = f+(g+h)$$

2) Αντιμεταθετική ιδιότητα της $+$. Έστω $x \in A$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g+f)(x) \Rightarrow f+g = g+f$$

3) Επιπλέον υπάρχει ουδέτερο στοιχείο 0 για την $+$

$$0(x) = 0 \quad \forall x \in A$$

$$(f+0)(x) = f(x) + 0(x) = f(x) + 0 = f(x)$$

$$(0+f)(x) = \dots = f(x)$$

4) $\forall f \in F(A, \mathbb{R})$ ορίστωτε $-f$ ως εξής $(-f)(x) = -f(x) \forall x \in A$
 τότε $(f + (-f))(x) = f(x) + (-f)(x) = f(x) - f(x) = 0 = 0(x)$
 $(-f) + f = \dots = 0$

5) $\lambda(f)(x) = \lambda \cdot f(x) = (\lambda \cdot 1)f(x) = \lambda f(x)$

6) $(1 \cdot f)(x) = 1 \cdot f(x) = f(x)$

7) $\lambda(f+g)(x) = \lambda(f(x)+g(x)) = \lambda f(x) + \lambda g(x)$

ήτοι $\lambda(f+g) = \lambda f + \lambda g$

8) $[(\lambda+1)g](x) = (\lambda+1)g(x) = \lambda g(x) + 1 \cdot g(x)$

ήτοι $(\lambda+1)g = \lambda g + 1g$

Άρα $F(A, \mathbb{R})$ με ως πράξεις $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
 $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ είναι διανυσμα. χώρος πάνω στον $\mathbb{R}$.

Δ' Έστω $(f_n) \subseteq F(A, \mathbb{R})$ και $f \in F(A, \mathbb{R})$

Έστω επίσης $x \in A$ τότε $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μία ακολουθία στον $\mathbb{R}$.

Για το συγκεκριμένο x , αν το $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ υπάρχει ορίζεται μονοσήμαντα.

Για όλα τα $x \in D \subseteq A$ για τα οποία το $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ υπάρχει ισχύει $x: f_n(x) \rightarrow f(x)$.

• Για το $x \in A$ λέμε ότι $f_n(x) \rightarrow f(x)$ αν

$(\forall \epsilon > 0)(\exists v_0 \in \mathbb{N}) : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$, $v_0 = v_0(\epsilon, x)$

Εάν $(\forall x \in A)(\exists v_0 = v_0(\epsilon, x))(\forall n \geq v_0) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$

τότε θα λέμε ότι η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο στην f στο A .

Συμβολισμοί

$f_n \xrightarrow{\text{c.s.}} f$

ή

$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \equiv f$

Q

Q: $\mathbb{P} \cap \mathbb{Z}$
Q^c: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{P}$

$$\text{Έστω } f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 0, & x \in \mathbb{Q}^c \cap [0, 1] \end{cases}$$

Λύση

Το σύνολο $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ είναι αριθμητικό

(συνεπώς υπάρχει μια 1-1 αντιστοιχία με το $\mathbb{N}$)

$$\text{έπε } \mathbb{Q} \cap [0, 1] = \{r_1, \dots, r_n, \dots\}$$

Έστω $A = [0, 1]$ και ορίσω $f_n: A \rightarrow \mathbb{R}$ ως εξής

$$f_1(x) = \begin{cases} 1, & x = r_1 \\ 0, & x \neq r_1 \end{cases} \quad \dots \quad f_n(x) = \begin{cases} 1, & x = r_1, \dots, r_n \\ 0, & x \neq r_1, \dots, r_n \end{cases}$$

Θα εξετάσουμε αν η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο

Έστω $x \in [0, 1]$ τότε διακρίνουμε ως εξής περιπτώσεις.

1) $x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ τότε το x θα έχει κάποια θέση στην

αριθμητική δηλ. $x = r_{n_0}$ τότε για $n \geq n_0$ θα ισχύει

$$f_n(x) = f_n(r_{n_0}) = 1 \quad \text{έπε } \lim f_n(x) = 1 \quad \text{έπε } f_n(x) \xrightarrow{\text{ε.σ.}} 1$$

2) $x \in \mathbb{Q}^c \cap [0, 1]$ τότε $f_n(x) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ οπότε $\lim f_n(x) = 0$

έπε σε αυτήν την περίπτωση $f_n(x) \rightarrow f(x)$ που

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 0, & x \in \mathbb{Q}^c \cap [0, 1] \end{cases}$$

έχουμε $f_n \xrightarrow{\text{ε.σ.}} f$

Αν και κάθε μια από τις f_n είναι συνεχής παντού εκτός

από περσφωμένο πλήθος σημείων η οριακή f είναι

ασυνεχής παντού $\forall y \in [0, 1]$ ισχύει $\liminf_{x \rightarrow y} f(x) \neq \limsup_{x \rightarrow y} f(x)$

Δ' Έστω $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$

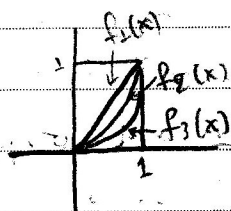
• Αν $x = 0$ τότε $f_n(x) = f_n(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

• Επίσης αν $x \in (0, 1)$ τότε εφαι $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$

έπε $x \neq 0$ οπ $f_n \xrightarrow{\text{ε.σ.}} 0$

• ενώ για $x = 1$: $f_n(x) = 1^n = 1$ έπε $f_n(1) \rightarrow 1$

$$\text{Αν } f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases} \quad \text{τότε } f_n \xrightarrow{\text{ε.σ.}} f$$



Παρατηρώ ότι κάθε f_n συνεχής σε $[0, 1]$ αλλά η f

δεν είναι συνεχής σε $x_0 = 1$

Πα 2

$f_v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f_v(x) = \frac{x}{v} \quad \forall v \in \mathbb{N}$ τότε αν $f(x) = 0, x \in \mathbb{R}$
 τότε $f_v \xrightarrow{κ.σ.} f$

Πα 3

$f_v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f_v(x) = \frac{x^{2v}}{1+x^{2v}}, v \in \mathbb{N}$ τότε

1) αν $|x| < 1$ τότε $\lim_{v \rightarrow \infty} x^{2v} = 0 \Rightarrow \lim_{v \rightarrow \infty} f_v(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ με } |x| < 1$

2) Εάν $|x| = 1 \Rightarrow \lim_{v \rightarrow \infty} x^{2v} = 1 \Rightarrow \lim_{v \rightarrow \infty} f_v(x) = \frac{1}{2}$

3) Εάν $|x| > 1$ τότε $\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{x^{2v}}{1+x^{2v}} = 1$ οπότε εάν

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , |x| < 1 \\ \frac{1}{2} & , |x| = 1 \\ 1 & , |x| > 1 \end{cases} \quad \text{τότε} \quad f_v(x) \xrightarrow{κ.σ.} f(x)$$

Παρατήρηση

Κάθε f_v συνεχής αλλά f ασυνεχής για $x = \pm 1$

Πα 4

$f_v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f_v(x) = \frac{\sin vx}{\sqrt{v}} \quad \forall v \in \mathbb{N}$

τότε $\forall x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $|f_v(x)| \leq 1/\sqrt{v}$ και

Επίσης $\frac{1}{\sqrt{v}} \rightarrow 0$ αν $f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ τότε $f_v \xrightarrow{κ.σ.} f$

Δοκιμάστε ένα ακόμη είδος σύγκλισης

Ορισμός

Έστω $(f_v) \subseteq F(A, \mathbb{R})$ και $f \in F(A, \mathbb{R})$ τότε θα λέμε ότι

η (f_v) συγκλίνει ομοιόμορφα στην f στο σύνολο A αν για

$\beta_v = \sup\{|f_v(x) - f(x)| : x \in A\}$ ισχύει $\lim_{v \rightarrow \infty} \beta_v = 0$

και θα συμβολίζαμε $f_v \rightarrow f$ ή $\lim_{v \rightarrow \infty} f_v = f$ και θα

συμβολίζαμε $f_v \rightarrow f$ ή $\lim_{v \rightarrow \infty} f_v = f$.

Προβλημα

$f_v \rightarrow f$ αν

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists v_0 \in \mathbb{N}) (\forall v \geq v_0) \Rightarrow |f_v(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in A$$

Παρατήρηση

στην ομοιόμορφη σύγκλιση του v_0 εξαρτάται μόνο από την
 επιλογή του ε δηλ. $v_0 = v_0(\varepsilon)$

Δηλ. αν ορισμός είναι γενικός ότι αν

$f_v \rightarrow f$ τότε και $f_v \xrightarrow{\text{κ.σ.}} f$

• Οπότε αν $f_v \rightarrow f$ τότε

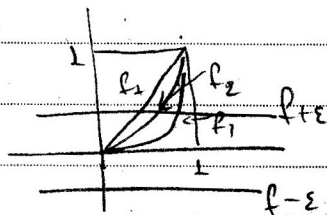
$$\forall v \geq v_0 \text{ ισχύει: } f_v(x) \in (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)$$

• Έστω $f_v: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ τέ $f_v(x) = x^v \quad \forall v \in \mathbb{N}$

Είδαμε πριν ότι $f_v \xrightarrow{\text{κ.σ.}} f$, $f(x) = 0$, $x \in (0, 1)$

Απόδειξη

$\forall \varepsilon > 0$. Από το ορίστη βλέπω ότι δεν υπάρχει όρια της ακολουθίας (f_v)
2.ω.: ολόκληρη η f_v να είναι
μεταξύ της λωρίδας $(f - \varepsilon, f + \varepsilon)$.



Ας υποθέσουμε ότι η σύγκλιση ήταν ομοιόμορφη τότε
($\forall \varepsilon > 0$) ($\exists v_0 = v_0(\varepsilon)$) ($\forall v \geq v_0$) ($\Rightarrow$) $|f_v(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in (0, 1)$

• Έστω $\varepsilon = \frac{1}{4}$ τότε θα πρέπει να υπάρχει v_0 : $\forall v \geq v_0$
 $|x^v - 0| < \varepsilon \quad \forall x \in (0, 1)$; $x^v < \frac{1}{4} \quad \forall x \in (0, 1)$

• Έστω $x = 1 - \frac{1}{v}$ τότε $x \in (0, 1)$. Θα πρέπει να ισχύει
 $(1 - \frac{1}{v})^v < \frac{1}{4}$ αλλά $\lim_{v \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{v})^v = e^{-1} = \frac{1}{e}$
οπότε $\frac{1}{e} < \frac{1}{4}$ ΑΖΩΟ

• Έστω $f_v: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ τέ $f_v(x) = \frac{x}{v}$ τότε αν $f(x) = 0 \quad \forall x \in (0, 1)$

$f_v \xrightarrow{\text{κ.σ.}} f$ αλλά αν για $\varepsilon > 0$ επιλέξουμε $v_0 = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil + 1$ έχουμε ότι
($\forall v \geq v_0$): $|f_v(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in (0, 1)$

Αρα $f_v \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο $(0, 1)$

• Έστω $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $f_v \xrightarrow{\text{κ.σ.}} f$

Για αρκετά μικρό ε ορίσαμε $N_\varepsilon(x) = \min \{t \in \mathbb{N} : v \geq t \Rightarrow |f_v(x) - f(x)| < \varepsilon\}$

(το σύνολο $A = \{t \in \mathbb{N} : \forall x \text{ ισχύει } |f_v(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ εφόσον } t \geq N_\varepsilon(x)\}$
δίνει $f_v \xrightarrow{\text{κ.σ.}} f$)

Ορισμός

Έστω σημείο y θα λέγεται σημείο ομοιόμορφης σύγκλισης της $(f_v) \in F(A, \mathbb{R})$ όταν $f \in F(A, \mathbb{R})$ αν $(\forall \varepsilon > 0) (\exists V_y \text{ γειτονιά του } y) \text{ έτσι ώστε } \sup\{N_\varepsilon(x) : x \in U(y) \cap A\} < +\infty$.
Σε αυτήν την περίπτωση λέμε ότι η (f_v) συγκλίνει ομοιόμορφα στο f .

Πρόταση

Αν (f_v) συγκλίνει ομοιόμορφα στην f στο A τότε $\forall y \in A$ είναι σημείο ομοιόμορφης σύγκλισης της (f_v) προς την f .

Απόδειξη

Έστω ότι $f_v \rightarrow f$ στο A τότε

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists v_0 = v_0(\varepsilon)) (\forall v \geq v_0) \Rightarrow |f_v(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in A$$

Έστω $y \in A$ τότε αν $U(y)$ γειτονιά του y $\forall x \in U(y) \cap A$

η ε ισχύει: $N_\varepsilon(x) \leq v_0$, συνεπώς

$\sup\{N_\varepsilon(x) : x \in U(y) \cap A\} \leq v_0 < +\infty$ και άρα το y είναι σημ. ομοιόμορφης σύγκλισης

Παράδειγμα

Ακόμη και αν $\forall y \in A$ είναι σημ. ομοιόμ. σύγκλισης της (f_v) προς την f ΔΕΝ σημαίνει ότι η (f_v) συγκλίνει ομοιόμορφα στην f στο A .

ΠΔ

$f_v(x) = x^v$, $x \in (0, 1)$ είδαμε ότι $f_v(x) \xrightarrow{v \rightarrow \infty} 0$ στο $(0, 1)$

Επίσης, η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη διότι

$$\sup\{|f_v(x) - f(x)| : x \in A\} = \sup\{|x^v| : x \in (0, 1)\} = 1 \text{ άρα}$$

$$\lim_{v \rightarrow \infty} (\sup\{|f_v(x) - f(x)| : x \in A\}) = 1 \neq 0, \text{ έστω όπως } y \in (0, 1)$$

και έστω επίσης $\varepsilon > 0 : |f_v(y) - f(y)| < \varepsilon \Rightarrow |y^v - 0| < \varepsilon$

$$\Rightarrow y^v < \varepsilon \Rightarrow v \log y < \log \varepsilon \Rightarrow v > \frac{\log \varepsilon}{\log y} \text{ συνεπώς}$$

$$\text{επιλέγοντας } v_0 = \left\lceil \frac{\log \varepsilon}{\log y} \right\rceil + 1 \text{ έχουμε :}$$

$$|f_v(y) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall v \geq v_0$$

Έστω $U_y = \left(\frac{y}{2}, \frac{y+1}{2}\right) \subseteq (0, 1)$ τότε αν $g(x) = \frac{\log x}{\log 2}$,
 $\Rightarrow g'(x) = -\frac{\log 2}{x \log^2 x} > 0$ δηλ $g \uparrow$ στο $\left(\frac{y}{2}, \frac{y+1}{2}\right)$ $x \in (0, 1)$
 συνεπώς $\sup\{N_\varepsilon(x) : x \in U(y) \cap A\} \leq \left\lceil \frac{\log \varepsilon}{\log(\frac{y+1}{2})} \right\rceil + 1 < +\infty$ δηλ
 το y είναι υπ. αριθμ. ορίων

Πρόταση

Μια ακολουθία $(f_v) \subseteq F(A, \mathbb{R})$ συγκλίνει ομοιόμορφα προς f αν
 συνάρτηση $f \in F(A, \mathbb{R}) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists K > 0) : N_\varepsilon(x) \leq K \ \forall x \in A$

Απόδειξη

($\Rightarrow$) Έστω $f_v \rightarrow f$ ομοιόμορφα τότε :

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists v_0 \in \mathbb{N})(\forall v \geq v_0) \Rightarrow |f_v(x) - f(x)| < \varepsilon \ \forall x \in A$$

$$\text{δηλ } N_\varepsilon(x) = \min\{v : v \geq v_0 \text{ και } |f_v(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in A\} \leq v_0$$

συνεπώς $N_\varepsilon(x) \leq v_0 \ \forall x \in A$ και αρκεί $K = v_0$

($\Leftarrow$) Έστω $(\forall \varepsilon > 0)(\exists K > 0) : N_\varepsilon(x) \leq K \ \forall x \in A$.

Έστω $\varepsilon > 0$ και έστω $v_0 = [K] + 1$ τότε

$$\forall v \geq v_0 \geq N_\varepsilon(x) \Rightarrow |f_v(x) - f(x)| < \varepsilon$$

$$\text{Άρα, } \forall v \geq v_0 \Rightarrow |f_v(x) - f(x)| < \varepsilon \ \forall x \in A$$

δηλ. $f_v \rightarrow f$ στο A